ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ТРЁХКОЛЁСНОГО РОБОТА НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

А. В. Карапетян, М.А. Салмина, Москва, Россия

На основе общих методов исследования стационарных движений [1-4] изучаются вопросы существования, устойчивости и ветвления стационарных движений трехколесного робота на горизонтальной плоскости, а также вопросы рождения предельных циклов.

С точностью до обозначений, уравнения движений робота, выведенные в [5], имеют вид (в симметричном случае)

$$\dot{\nu} + \nu - \omega^2 = p, \mathrm{A}\dot{\omega} + \omega + \omega\nu = q \tag{1}$$

Здесь ν — безразмерная скорость одной из точек корпуса робота (середины оси, на которую насажены два ведущих колеса), ω — безразмерная угловая скорость вращения корпуса вокруг вертикали, $\mathrm{A} > 0$ — безразмерный момент инерции робота относительно вертикали, проходящей через его центр масс, p и q - безразмерные постоянные (управления); точка означает производную по безразмерному времени.

Очевидно, уравнения (1) инвариантны относительно замены q на $-q$ и ω на $-\omega$, поэтому можно ограничиться исследованием случаев $q = 0$ и $q > 0$. Случай $q = 0$ – элементарен, поэтому рассмотрим случай $q > 0$. Очевидно, стационарные точки системы (1) определяются из уравнений

$$\nu - \omega^2 = p,\ \omega + \omega\nu = q$$

которые можно представить в виде

$$\nu = p + \omega^2, \omega^3 + (p+1)\omega - q = 0 \tag{2}$$

Разрешая второе уравнение системы (2) относительно $p + 1$, имеем

$$p + 1 = q/\omega - \omega^2 = f(\omega)$$

Таким образом, при $q > 0$ уравнения (1) допускают стационарные движения вида

$$\omega = \omega_0(p), \nu = \nu_0(p) = p + \omega_0^2(p) \tag{3}$$

$$\omega = \omega_{1,2}(p), \nu = \nu_{1,2}(p) = p + \omega_{1,2}^2(p) \tag{4}$$

Стационарные движения (3) существуют при любом $p \in (-\infty, +\infty)$, а стационарные движения (4) — только при $p+1 < -3(q/2)^{2/3}$; при этом $+\infty > \omega_0(p) > 0 > \omega_1(p) > \omega_* > \omega_2(p) > -\infty$, $(\omega_* = -(q/2)^{1/3})$.

Полагая $\nu = \nu_i(p) + x = p + \omega_i^2(p) + x$, $\omega = \omega_i(p) + y$ и обозначая $A\dot{\nu}$ и $A\dot{\omega}$ через ν' и ω' соответственно, выпишем уравнения возмущенного движения системы

$$x' = -Ax + 2\omega_i Ay + Ay^2,\ y' = -\omega_i x - (1 + p + \omega_i^2)y - xy \tag{5}$$

и соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + R\lambda + S = 0$$

$$R = R_i = A + (p+1) + \omega_i^2,\ S = S_i = \left[(p+1) + 3\omega_i^2\right]A$$

Очевидно,

$$R_0 = A + f(\omega_0) + \omega_0^2 = A + q/\omega_0 > 0,\ S = S_0 = \left[(p+1) + 3\omega_0^2\right]A = \left(2\omega_0^2 + q/\omega_0\right)A > 0$$

Таким образом, стационарные движения (3) асимптотически устойчивы. Аналогично имеем

$$R_{1,2} = A + q/\omega_{1,2},\ S_{1,2} = \left[2\omega_{1,2}^2 + q/\omega_{1,2}\right]A$$

Учитывая интервалы изменения функций $\omega_1(p)$ и $\omega_2(p)$, заключаем, что $S_1 < 0$, а $S_2 > 0$ при всех $(p+1) < -3(q/2)^{2/3}$. Далее, $R_{1,2} > 0$ ($R_{1,2} < 0$) при $\omega_{1,2} < -q/A = \omega_{**} < 0$ ($\omega_{1,2} > \omega_{**}$), причем $\omega_{**} > \omega_*$, ($\omega_{**} < \omega_*$) при $q^2 > A^3/2$ ($q^2 < A^3/2$). Таким образом, при $q > 0$ следует различать два случая: $q \le \sqrt{A^3/2}$ и $q > \sqrt{A^3/2}$. В первом случае $R_2 > 0$ на всей ветви $\omega_2(p)$, а во втором – только на её части, соответствующей значениям $p+1 < -A - q^2/A^2$.

Таким образом, стационарные движения $\omega_1(p)$, $\nu_1(p)$ неустойчивы, а стационарные движения $\omega_2(p), \nu_2(p)$ асимптотически устойчивы при $q \le \sqrt{A^3/2}$, а также при $q > \sqrt{A^3/2}$, если $p+1 < -A - q^2/A^2$, и неустойчивы при $q > \sqrt{A^3/2}$, если $p+1 > -A - q^2/A^2$.

Следовательно, если $q > \sqrt{A^3/2}$, то при $p+1 = -A - q^2/A^2$ имеет место бифуркация Андронова-Хопфа: от стационарных движений $\omega_2(p), \nu_2(p)$ ответвляются периодические движения; на фазовой плоскости $(\omega;\nu)$ им соответствуют предельные циклы.

Вычисляя для системы (5) число Ляпунова, имеем

$$L = \frac{3\pi A^5}{4(2q^2 - A^3)^{3/2}} > 0$$

Вспоминая, что при переходе параметра $p+1$ через значение $-A - q^2/A^2$ слева направо функция $R_2(p+1)$ меняет знак с положительного на отрицательный, заключаем, что периодические движения, ответвляющиеся от стационарных движений $\omega_2(p), \nu_2(p)$, существуют при $p+1 < -A - q^2/A^2$ и являются неустойчивыми. Эти выводы согласуются с результатами работы [5], в которой численно была показана неустойчивость предельных циклов в рассматриваемой задаче.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-00398) и программы «Университеты России».

Литература

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: АН СССР. 1962. 535с.

2. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир. 1980. 368с.

3. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи области устойчивости. М.: Наука. 1984. 176с.

4. Карпетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС. 1998. 165с.

5. Буданов В.М., Девянин Е.А. О движении колесных роботов // ПММ. 2003. Т.67. №2. С. 244–255.